

TD₁ – Révisions d'analyse

Exercice 1 ★

1. Linéariser $\sin^6(x)$ (i.e. l'exprimer comme somme de cos et de sin, sans puissances).
2. Exprimer $\cos(7\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.

Exercice 2 ★★

1. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R} : (E) : \sin 4x - \sin x = 0$.
2. Déterminer un polynôme P vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin 4x - \sin x = P(\cos x) \sin x$.
3. Calculer les racines de P , en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 3 ★★

Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2 \cos(2x) = \cos(x) \sin(x), \quad \cos(4x) + \cos(5x) + \cos(6x) = 0 \quad \text{et} \quad 2x + \cos(x) - \pi = 0$$

Exercice 4 ★

Étudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives :

$$f : x \mapsto \arccos(\cos(x)) \text{ et } g : x \mapsto \cos(\arccos(x)).$$

Exercice 5 ★★

Soit $n \in \mathbb{N}$ et a, b des réels. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(ak + b)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(ak + b)$. En déduire

$$S = \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right).$$

Exercice 6 ★★

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée.
2. f atteint-elle ses bornes ?

Exercice 7 ★

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ième de f et g où

$$f : x \mapsto (3x^2 + x - 5) e^{-x} \text{ et } g : x \mapsto \frac{2x - 1}{x + 1}.$$

Exercice 8 ★★

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x ,

$$P_{n+1}(x) = (1 + x^2) P'_n(x) - (2n + 1)x P_n(x)$$

où l'on a posé $P_n(x) = (1 + x^2)^{n+\frac{1}{2}} f^{(n)}(x)$.

2. Établir que, pour tout entier naturel n , P_n est un polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient dominant.
 3. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par f ; en déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x

$$P_{n+1}(x) + (2n + 1)x P_n(x) + n^2 (1 + x^2) P_{n-1}(x) = 0$$

4. Déterminer $P_n(0)$ en fonction de n , selon la parité de n .

Exercice 9 ★★

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et P un polynôme réel. On suppose que P possède $n + 1$ racines distinctes dans $]a, b[$.

1. Montrer que P' possède au moins n racines distinctes dans $]a, b[$. Que peut-on dire de P et P' lorsque $\deg(P) = n + 1$?
 2. Montrer que le polynôme $P^{(n)}$ possède au moins une racine dans $]a, b[$.

Exercice 10 ★★

Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $\arcsin(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Exercice 11 ★★

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[0, a]$, telle que : $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$.

1. On pose, pour $x \in]0, a]$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. Montrer que g est dérivable sur $]0, a]$, et calculer $g'(x)$ pour $x \in]0, a]$.
 2. Montrer qu'il existe $c \in]0, a[$ tel que la tangente en c à la courbe représentative de f passe par l'origine.

Exercice 12 ★★

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$.

Exercice 13 ★★

Montrer que si f est dérivable sur un intervalle où f' ne s'annule pas, alors f est injective.

Exercices issus d'oraux

Exercice 14 ★★

(Oral 2014)

Soit f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout x et y et $f'(0) = 1$.

1. Montrer que $f(0) = 1$.
2. Montrer que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $f' = f$ et conclure

Exercice 15 ★★★

(Oral 2011)

Déterminer, en fonction du paramètre $a > 0$, le nombre de solutions de l'équation

$$\left(\frac{a+x}{2}\right)^{\frac{a+x}{2}} = a^x$$

On pourra étudier une fonction bien choisie.

Exercice 16 ★★★

(Oral 2017)

Soit P un polynôme. Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ n'admet qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 17 ★★★

(Oral 2017, 2018)

On définit la fonction $\varphi : x \mapsto \arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3)$.

1. Montrer que $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi(5) \leq \frac{3\pi}{2}$
2. Calculer la valeur exacte de $\varphi(5)$.
3. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
4. Résoudre $\varphi(x) = \frac{\pi}{4}$

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. On a $\sin^6(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^6$.

On développe à l'aide de la formule du binôme de Newton, ce qui donne :

$$\sin^6(x) = -\frac{1}{2^6} (e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix})$$

Ainsi

$$\sin^6(x) = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos(2x) + \frac{3}{16} \cos(4x) - \frac{1}{32} \cos(6x)$$

2. On a $\cos(7\theta) = \operatorname{Re}((\cos(\theta) + i \sin(\theta))^7)$

On utilise la formule du binôme de Newton et on ne conserve que les termes réels, ce qui donne :

$$\cos(7\theta) = \cos^7(\theta) - 21 \cos^5(\theta) \sin^2(\theta) + 35 \cos^3(\theta) \sin^4(\theta) - 7 \sin^6(\theta) \cos(\theta)$$

Or $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$, $\sin^4(\theta) = (1 - \cos^2(\theta))^2 = 1 - 2\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta)$ et $\sin^6(\theta) = (1 - \cos^2(\theta))^3 = 1 - 3\cos^2(\theta) + 3\cos^4(\theta) - \cos^6(\theta)$

Ainsi en remplaçant dans l'expression précédente

$$\cos(7\theta) = 64 \cos^7(\theta) - 112 \cos^5(\theta) + 56 \cos^3(\theta) - 7 \cos(\theta)$$

Corrigé de l'exercice 2

1.

$$\begin{aligned} \sin(4x) - \sin(x) = 0 & \Leftrightarrow \sin(4x) = \sin(x) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, & 4x = x + 2k\pi \\ \exists k \in \mathbb{Z}, & 4x = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi x est solution de (E) si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(4x) = \operatorname{Im}((\cos(x) + i \sin(x))^4)$.

On utilise la formule du binôme de Newton et on ne garde que la partie imaginaire :

$$\begin{aligned} \sin(4x) &= 4 \cos^3(x) \sin(x) - 4 \cos(x) \sin^3(x) \\ &= 4 \sin(x) \cos(x) (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= 4 \sin(x) \cos(x) (2 \cos^2(x) - 1) \end{aligned}$$

D'où

$$\sin(4x) - \sin(x) = \sin(x) (8 \cos^3(x) - 4 \cos(x) - 1)$$

Ainsi $P = 8X^3 - 4X - 1$ convient.

3. Dans la première question, $x = \frac{2\pi}{3}$ est solution de (E) .

On vérifie donc que $-\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ est racine de P , ce qui est bien le cas.

On factorise alors P par $2X + 1$, ce qui donne $P(X) = (2X + 1)(4X^2 - 2X - 1)$.

Les racines de P sont donc $-\frac{1}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Or, d'après la question 1., les racines de P sont aussi $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

De plus $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0 > \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Ainsi $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

Enfin $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Corrigé de l'exercice 3

a) On a $2\cos(2x) = \cos x \cdot \sin x$ si et seulement si $2\cos(2x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

Or les réels de la forme $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ ne sont pas solutions de l'équation ainsi

$$2\cos(2x) = \cos x \cdot \sin x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \tan(2x) = 4 \end{cases}$$

Finalement $2\cos(2x) = \cos x \cdot \sin x$ si et seulement $x \in \left\{ \frac{1}{2}\text{Arctan}(4) + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) En exploitant les formules d'addition vues en cours on a

$$\cos(4x) + \cos(5x) + \cos(6x) = \cos(5x) + \frac{1}{2}\cos(5x)\cos(x) = \cos(5x)(1 + 2\cos(x))$$

Ainsi

$$\cos(4x) + \cos(5x) + \cos(6x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + \cos(x) - \pi$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2 - \sin(x) > 0$, ainsi f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

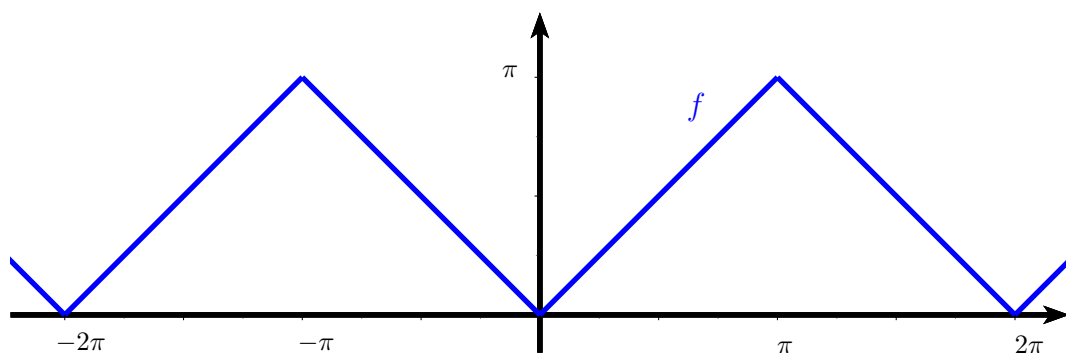
L'équation $2x + \cos x - \pi = 0$ admet alors une unique solution. On remarque que $\frac{\pi}{2}$ est une solution évidente, c'est donc l'unique solution de l'équation.

Corrigé de l'exercice 4

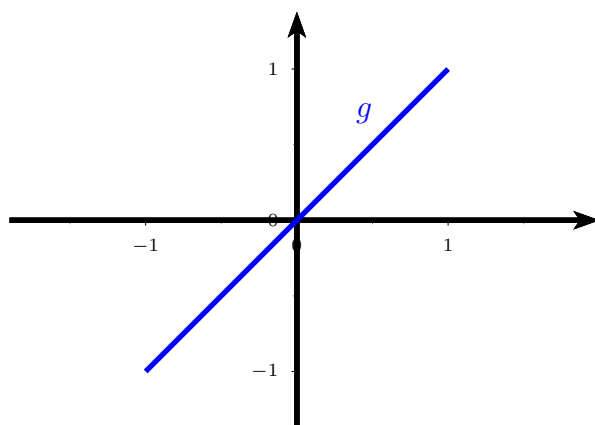
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique, paire, car $\cos$ l'est. On l'étudie donc sur $[0, \pi]$.

Par définition arccos est la bijection réciproque de la fonction $\cos$ sur $[0, \pi]$, d'où, pour tout $x \in [0, \pi]$, $f(x) = x$.

Par parité et 2π périodicité on en déduit le tracé



La fonction g est définie sur $[-1, 1]$ et on a, pour tout $x \in [-1, 1]$, $g(x) = x$, d'où le tracé.



Corrigé de l'exercice 5

Soient $n \in \mathbb{N}$, et a, b des réels. On a

$$\sum_{k=0}^n \cos(ak + b) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Re} \left(e^{i(ak+b)} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{i(ak+b)} \right)$$

et

$$\sum_{k=0}^n \sin(ak + b) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Im} \left(e^{i(ak+b)} \right) = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n e^{i(ak+b)} \right)$$

Calculons donc $\sum_{k=0}^n e^{i(ak+b)}$

Si $a \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ alors

$$\sum_{k=0}^n e^{i(ak+b)} = e^{ib} \sum_{k=0}^n 1 = (n+1)e^{ib}$$

Sinon

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n e^{i(ak+b)} &= e^{ib} \sum_{k=0}^n (e^{ia})^k \\
 &= e^{ib} \frac{1 - e^{i(n+1)a}}{1 - e^{ia}} \\
 &= e^{ib} \frac{e^{\frac{i(n+1)a}{2}} e^{-\frac{i(n+1)a}{2}} - e^{-\frac{i(n+1)a}{2}}}{e^{\frac{ia}{2}} e^{-\frac{ia}{2}} - e^{-\frac{ia}{2}}} \\
 &= e^{ib} e^{\frac{ina}{2}} \frac{-2i \sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{a}{2}\right)} \\
 &= e^{i(b+\frac{na}{2})} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^n \cos(ak+b) = \begin{cases} (n+1) \cos(b) & \text{si } a \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \cos\left(b + \frac{na}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\sum_{k=0}^n \sin(ak+b) = \begin{cases} (n+1) \sin(b) & \text{si } a \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \sin\left(b + \frac{na}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour calculer $S = \cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right)$, on pose $b = \frac{\pi}{11}$,
 $a = \frac{2\pi}{11}$ et $n = 4$.

On obtient

$$\begin{aligned}
 S &= \cos\left(\frac{\pi}{11} + \frac{4\pi}{11}\right) \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} \\
 &= \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{11}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{11}\right)} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 6

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Notons ℓ la limite de f en $+\infty$.

Par définition de la limite, il existe $A > 0$, tel que, pour tout $t > A$, $\ell - 1 < f(t) < \ell + 1$.

De plus f est continue sur le segment $[0, A]$, elle y donc est bornée et atteint ses bornes. Notons m son minimum, M son maximum sur le segment $[0, A]$

On va poser $m_1 = \min(m, \ell - 1)$ et $M_1 = \max(M, \ell + 1)$.

Si $t \in [0, A]$, alors $m_1 \leq m \leq f(t) \leq M \leq M_1$ et, si $t > A$, alors $m_1 \leq \ell - 1 \leq f(t) \leq \ell + 1 \leq M_1$.

Ainsi f est majorée par M_1 sur $[0, +\infty[$ et y est minorée par m_1 . Elle y est donc bornée.

2. f n'atteint pas toujours ses bornes. Par exemple si on considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, alors la borne inférieure de f vaut 0 et pourtant f reste strictement positive sur $[0, +\infty[$.

Corrigé de l'exercice 7

- f est le produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Notons $a : x \mapsto 3x^2 + x - 5$ et $b : x \mapsto e^{-x}$

Pour calculer la dérivée n -ième de f , on utilise la formule de Leibniz, ce qui donne, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(k)}(x) b^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} a^{(k)}(x) b^{(n-k)}(x) \\ &= (-1)^n (3x^2 + x - 5) e^{-x} + (-1)^{n-1} n (6x + 1) e^{-x} + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} 6 e^{-x} \\ &= (-1)^n (3x^2 + (1 - 6n)x - 5 - n + 3n(n-1)) e^{-x} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-1)^n (3x^2 + (1 - 6n)x - 5 - n + 3n(n-1)) e^{-x}$$

- g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\text{Pour } x \neq -1 \text{ on a } g(x) = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}.$$

Soit c définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $c(x) = \frac{1}{x+1}$. c y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

En calculant les premières dérivées, on conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$ et on le prouve par récurrence.

En appliquant de nouveau la formule de Leibniz on obtient que, pour $n \leq 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f^{(n)}(x) = -\frac{3(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Corrigé de l'exercice 8

1. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[1, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, donc sur $[1, +\infty[$. Par composition, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on définit $P_n(x) = (1 + x^2)^{n+\frac{1}{2}} f^{(n)}(x)$.

P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$P'_n(x) = 2x \left(n + \frac{1}{2} \right) (1+x^2)^{n-\frac{1}{2}} f^{(n)}(x) + (1+x^2)^{n+\frac{1}{2}} f^{(n+1)}(x)$$

D'où

$$(1+x^2)P'_n(x) = 2x \left(n + \frac{1}{2} \right) (1+x^2)^{n+\frac{1}{2}} f^{(n)}(x) + (1+x^2)^{n+1+\frac{1}{2}} f^{(n+1)}(x)$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}$ on a $(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}} f^{(n)}(x) = P_n(x)$ et $(1+x^2)^{n+1+\frac{1}{2}} f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)$. Ainsi

$$(1+x^2)P'_n(x) = 2x \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(x) + P_{n+1}(x)$$

Ou encore $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x) - (2n+1)xP_n(x)$.

2. Grâce à la relation de récurrence, on calcule $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = -x$, $P_2(x) = 2x^2 - 1$, $P_3(x) = -6x^3 + 9x$.

On conjecture que P_n est un polynôme de degré n , de coefficient dominant $(-1)^n.n!$ ce que l'on va montrer par récurrence

On pose $\mathcal{H}(n)$: « $P_n(x) = (-1)^n.n!x^n + R_n(x)$ avec R_n polynôme de degré strictement inférieur à n ».

Initialisation :

On a vu que $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. On a alors

$$P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x) - (2n+1)xP_n(x) = (1+x^2)((-1)^n.n!.n.x^{n-1} + R'_n(x)) - (2n+1)x(-1)^n.n!x^n - (2n+1)xR_n(x)$$

Posons $R_{n+1}(x) = (1+x^2)R'_n(x) - (2n+1)xR_n(x) + (-1)^n.n.n!x^{n-1}$. R_{n+1} est bien un polynôme de degré strictement inférieur à $n+1$. On a alors

$$P_{n+1}(x) = -(-1)^n.n!(2n+1)x^{n+1} + (-1)^n.n!.n.x^{n+1} + R_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}.n!(2n+1-n)x^{n+1} + R_{n+1}(x)$$

Ainsi $P_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!x^{n+1} + R_{n+1}(x)$ avec R_{n+1} polynôme de degré strictement inférieur à $n+1$.

Ce qui prouve la propriété $\mathcal{H}(n+1)$ et achève la récurrence.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = \frac{-2x}{2(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{x^2+1} f'(x)$.

Ainsi f est solution de l'équation différentielle linéaire $(1+x^2)f'(x) + xf(x) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on applique la formule de Leibniz à l'ordre n à l'égalité précédente, ce qui donne :

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nxf^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) + xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x) = 0$$

Ou encore

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + (2n+1)xf^{(n)}(x) + n^2f^{(n-1)}(x) = 0$$

On multiplie par $(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}$ ce qui donne

$$(1+x^2)^{n+\frac{3}{2}}f^{(n+1)}(x) + (2n+1)x(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}f^{(n)}(x) + n^2(1+x^2)(1+x^2)^{n-\frac{1}{2}}f^{(n-1)}(x) = 0$$

C'est-à-dire

$$P_{n+1}(x) + (2n+1)xP_n(x) + n^2(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

4. On a calculé les premiers polynômes ce qui nous permet de conjecturer que si n est impair, $P_n(0) = 0$ ce que l'on va prouver par récurrence.

Initialisation :

On a bien $P_1(0) = 0$

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $P_{2n-1}(0) = 0$ et on va montrer que $P_{2n+1}(0) = 0$.

La relation de la question précédente évaluée en 0 nous donne

$$P_{2n+1}(0) = -(4n+1) \times 0 \times P_{2n}(0) - 4n^2(1+0^2)P_{2n-1}(0) = 0$$

Ce qui prouve la propriété au rang suivant et achève la récurrence.

L'exploitation des questions précédentes nous permet également de constater que $P_0(0) = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+2} = -(2n+1)^2 P_{2n}(0)$.

On conjecture alors que $P_{2n}(0) = (-1)^n (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1))^2 = (-1)^n \left(\frac{(2n)!}{2^n n!} \right)^2$ ce qui se montre également par une récurrence facile.

Corrigé de l'exercice 9

1. Notons $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ les $n+1$ racines distinctes de P .

Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. P est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ et $P(x_i) = P(x_{i+1}) = 0$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P'(y_i) = 0$.

Ainsi P' possède au moins n racines distinctes dans $]a, b[$.

Lorsque $\deg(P) = n+1$, P est de degré $n+1$ et admet $n+1$ racines, il est donc scindé. On vient de montrer que P' admet alors n racines distinctes, il est donc également scindé.

2. On va montrer en fait un résultat plus général, par récurrence :

« Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $P^{(k)}$ a au moins $n-k+1$ racines dans $]a, b[$ »

On procède par récurrence sur k

Initialisation :

On a montré le résultat pour $k=1$ à la question précédente.

Hérédité

Soit $k < n$, on suppose que $P^{(k)}$ a au moins $n-k+1$ racines dans $]a, b[$, alors en reprenant le résultat de la question $P^{(k+1)} = (P^{(k)})'$ a au moins $n-k$ racines dans $]a, b[$.

Ce qui prouve la propriété au rang $k+1$ et achève la récurrence.

En considérant le cas $k=n$, on en déduit bien que $P^{(n)}$ a $n-n+1=1$ racine au moins dans $]a, b[$.

Corrigé de l'exercice 10

Soit $x \in]0, 1[$, la fonction arcsin est dérivable sur $[0, x]$ et sa dérivée $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est croissante sur $[0, x]$ comme composée de deux fonctions décroissantes.

Donc

$$\forall t \in [0, x], \quad \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis on a

$$\arcsin(x) - \arcsin(0) \leq \frac{x-0}{\sqrt{1-x^2}}$$

C'est-à-dire

$$\arcsin(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Corrigé de l'exercice 11

1. Comme $f(0) = 0$, on a $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, $g(x)$ est donc le taux d'accroissement de f en 0. f étant dérivable en 0, $g(x)$ tend vers $f'(0) = 0$ quand x tend vers 0. Ainsi g est prolongeable par continuité en posant $g(0) = f'(0) = 0$.
 g est dérivable sur $]0, a]$ en tant que quotient de fonctions dérivables, on trouve que

$$\forall x \in]0, a], \quad g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

2. Soit $x_0 \in]0, a[$. Une équation cartésienne de la tangente en x_0 à la courbe représentative de f est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ce qui peut encore s'écrire $y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0f'(x_0)$. Cette tangente passe par l'origine si et seulement si $f(x_0) - x_0f'(x_0) = 0$ ce qui équivaut à $g'(x_0) = 0$.

Or g est continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$, $g(0) = 0$ et $g(a) = \frac{f(a)}{a} = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]0, a[$ tel que $g'(c) = 0$.

Ainsi, il existe $c \in]0, a[$ tel que la tangente en c à la courbe représentative de f passe par l'origine.

Corrigé de l'exercice 12

Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}} &\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x \ln(x)} = e^{\sqrt{x} \ln(x)} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}x \ln(x) = \sqrt{x} \ln(x) \\ &\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{x}) \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) \ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

Les solutions dans $\mathbb{R}_+^*$ sont 1 et 4.

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln(x) = 0$ ainsi 0 est aussi solution.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{x}^x = x^{\sqrt{x}}$ est $\{0, 1, 4\}$.

Corrigé de l'exercice 13

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I où f' ne s'annule pas

Supposons par l'absurde que f n'est pas injective. Il existe alors $(a, b) \in I^2$ tel que $f(a) = f(b)$ et $a \neq b$.

Or f est continue sur $[a, b]$ (car dérivable) et dérivable sur $]a, b[$. Ainsi, par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ ce qui est absurde.

En conclusion, si f' ne s'annule pas alors f est injective.

Corrigé de l'exercice 14

1. En prenant x quelconque et $y = 0$ on a $f(x) = f(x)f(0)$. Puisque $f'(0) = 1$ alors f n'est pas la fonction constante nulle, il existe donc x tel que $f(x) \neq 0$. On en déduit alors $f(0) = 1$.

2. Supposons par l'absurde qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0$. Ainsi f est la fonction nulle ce qui est absurde.

Finalement f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $h \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0)f(h) - f(x_0)}{h} \\ &= f(x_0) \frac{f(h) - 1}{h} \end{aligned}$$

Or on sait que f est dérivable en 0, ainsi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = f'(0)$

Or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$, d'où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = 1$.

En injectant cela dans le calcul précédent on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

Ainsi f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = f(x_0)$.

On a donc montré que $f' = f$. Puisque de plus $f(0) = 1$ on en déduit que f est la fonction exponentielle.

Corrigé de l'exercice 15

Observons dans un premier temps que, si $\frac{a+x}{2} < 0$ alors l'expression $\left(\frac{a+x}{2}\right)^{\frac{a+x}{2}}$ n'a pas de sens. On se restreindra donc à étudier cette équation sur l'intervalle $[-a, +\infty[$.

Pour $x = -a$ on a $\left(\frac{a+x}{2}\right)^{\frac{a+x}{2}} = 0^0 = 1$ et $a^x = a^{-a}$. Or $a^{-a} = 1$ si et seulement si $a \ln(a) = 0$, ainsi $-a$ est solution de l'équation si et seulement si $a = 1$.

Soit $x \in]-a, +\infty[$, par bijectivité de la fonction $\ln$ on a $\left(\frac{a+x}{2}\right)^{\frac{a+x}{2}} = a^x$ si et seulement si

$$\frac{a+x}{2} \ln\left(\frac{a+x}{2}\right) = x \ln(a)$$

Posons alors la fonction $f :]-a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$:

$$x \mapsto \frac{a+x}{2} \ln\left(\frac{a+x}{2}\right) - x \ln(a)$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-a, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]-a, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a+x}{2}\right) + \frac{a+x}{2} \frac{1}{\frac{a+x}{2}} - \ln(a) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a+x}{2}\right) + \frac{1}{2} - \ln(a)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a+x}{2}\right) + \frac{1}{2} - \ln(a) > 0 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a+x}{2}\right) > 2 \ln(a) - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{a+x}{2} > a^2 e^{-1} \\ &\Leftrightarrow x > 2a^2 e^{-1} - a \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation

x	$-a$	$2a^2e^{-1} - a$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$a \ln(a)$	$a \ln(a) - a^2e^{-1}$	$+\infty$

De ceci on en déduit que :

- Si $a \ln(a) \leq 0$ alors l'équation admet une unique solution sur $] -a, +\infty[$
- Si $a \ln(a) > 0$ et $a \ln(a) - a^2e^{-1} < 0$ alors l'équation admet deux solutions sur $] -a, +\infty[$
- Si $a \ln(a) > 0$ et $a \ln(a) - a^2e^{-1} = 0$ alors l'équation admet une unique solution sur $] -a, +\infty[$
- Si $a \ln(a) > 0$ et $a \ln(a) - a^2e^{-1} > 0$ alors l'équation n'admet aucune solution sur $] -a, +\infty[$

On a $a \ln(a) > 0$ si et seulement $a > 1$ et $a \ln(a) - a^2e^{-1} > 0$ si et seulement $\ln(a) > ae^{-1}$.

Considérons la fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \ln(x) - xe^{-1}$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$, pour $x > 0$ on a $g'(x) = \frac{1}{x} - e^{-1}$ d'où le tableau de variations.

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
g	$-\infty$	0	$-\infty$

On constate donc que $a \ln(a) - a^2e^{-1} = 0$ lorsque $a = e$ et, dans tous les autres cas $a \ln(a) - a^2e^{-1} < 0$.

finalement en reformulant et en rajoutant l'éventuelle solution $-a$ dans le cas $a = 1$,

- Si $a = 1$ alors l'équation admet comme solution -1 ainsi qu'une unique autre solution sur $] -1, +\infty[$
- Si $a < 1$ alors l'équation admet une unique solution sur $] -a, +\infty[$
- Si $a = e$ alors l'équation admet une unique solution sur $] -a, +\infty[$
- Si $a > 1$ et $a \neq e$ alors l'équation admet deux solutions sur $] -a, +\infty[$

Corrigé de l'exercice 16

On va montrer par récurrence que, pour tout polynôme P de degré n , l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus $n + 1$ solutions.

Initialisation :

Un polynôme de degré 0 est un polynôme constant. La fonction exponentielle étant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, une équation de la forme $e^x = C$ admet une solution si $C > 0$ ($\ln(C)$) et aucune si $C \leq 0$, ce qui fait bien au plus $0 + 1$ solutions

Hérédité :

On suppose que, pour tout polynôme Q de degré n , l'équation $Q(x) = e^x$ admet au plus $n + 1$ solutions. Soit P un polynôme de degré $n + 1$. Supposons par l'absurde que l'équation $e^x = P(x)$ admette au moins $n + 2$ solutions, notées $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$.

Notons $f : x \mapsto P(x) - e^x$. On a alors

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{n+2}) = 0$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car tout polynôme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On peut alors appliquer le théorème de Rolle à f sur chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, où $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Il existe alors $y_1 \in]x_1, x_2[, y_2 \in]x_2, x_3[, \dots, y_{n+1} \in]x_{n+1}, x_{n+2}[$ tel que

$$f'(y_1) = f'(y_2) = \dots = f'(y_{n+1})$$

$y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ sont alors $n+1$ solutions distinctes de l'équation $P'(x) = e^x$. Or P' est de degré n , d'après l'hypothèse de récurrence, l'équation $P'(x) = e^x$ admet au plus n solutions.

On aboutit à une contradiction. Ainsi l'équation $P(x) = e^x$ admet bien au plus $n+1$ solutions, ce qui prouve l'hypothèse au rang $n+1$ et achève la récurrence

Corrigé de l'exercice 17

1. On sait que la fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et a pour limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, ainsi

$$\arctan(1) < \arctan(2) < \arctan(5) < \arctan(8) < \frac{\pi}{2}$$

C'est-à-dire

$$\frac{\pi}{4} < \arctan(2) < \arctan(5) < \arctan(8) < \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, en sommant $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi(5) \leq \frac{3\pi}{2}$.

2. Notons $a = \arctan(2)$, $b = \arctan(5)$ et $c = \arctan(8)$ on a alors

$$\begin{aligned} \tan(\varphi(5)) &= \tan(a+b+c) \\ &= \frac{\tan(a+b) + \tan(c)}{1 - \tan(a+b)\tan(c)} \\ &= \frac{8 + \tan(a+b)}{1 - 8\tan(a+b)} \\ &= \frac{8 + \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}}{1 - 8\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}} \\ &= \frac{8 + \frac{2+5}{1-2 \times 5}}{1 - 8\frac{2+5}{1-2 \times 5}} \\ &= \frac{8 - \frac{7}{9}}{1 + \frac{56}{9}} \\ &= \frac{72-7}{9+56} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Puisque $\tan(\varphi(5)) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ alors $\varphi(5) \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Or $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi(5) \leq \frac{3\pi}{2}$. Ainsi $\varphi(5) = \frac{5\pi}{4}$.

3. φ est la somme de trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissantes, ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et est strictement croissante. On en déduit le tableau de variations suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$



4. La fonction f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, d'après le théorème de la bijection continue l'équation $\varphi(x) = \frac{\pi}{4}$ admet donc une unique solution que l'on note x_0 . De plus, comme φ est strictement croissante, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(5) = \frac{5\pi}{4}$ d'où $x_0 \in]0, 5[$.

Notons $a = \arctan(x_0 - 3)$, $b = \arctan(x_0)$ et $c = \arctan(x_0 + 3)$ de sorte que $\varphi(x_0) = a + b + c$. On a alors

$$\begin{aligned} 1 &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \tan(a + b + c) \\ &= \frac{\tan(a + c) + \tan(b)}{1 - \tan(b)\tan(a + c)} \\ &= \frac{x_0 + \tan(a + c)}{1 - x_0 \tan(a + c)} \\ &= \frac{x_0 + \frac{\tan(a) + \tan(c)}{1 - \tan(a)\tan(c)}}{1 - x_0 \frac{\tan(a) + \tan(c)}{1 - \tan(a)\tan(c)}} \\ &= \frac{x_0 + \frac{x_0 - 3 + x_0 + 3}{1 - (x_0 - 3)(x_0 + 3)}}{1 - x_0 \frac{x_0 - 3 + x_0 + 3}{1 - (x_0 - 3)(x_0 + 3)}} \\ &= \frac{x_0 + \frac{2x_0}{1 - (x_0^2 - 9)}}{1 - x_0 \frac{2x_0}{1 - (x_0^2 - 9)}} \\ &= \frac{x_0 + \frac{2x_0}{10 - x_0^2}}{1 - \frac{2x_0^2}{10 - x_0^2}} \\ &= \frac{10x_0 - x_0^3 + 2x_0}{10 - x_0^2 - 2x_0^2} \\ &= \frac{12x_0 - x_0^3}{10 - 3x_0^2} \end{aligned}$$

Ainsi $12x_0 - x_0^3 = 10 - 3x_0^2$.

Posons $P = X^3 - 3X^2 - 12X + 10$. x_0 est donc une racine de P .

On a vu à la question 2. que $\tan(\varphi(5)) = 1$, ainsi $P(5) = 0$. On va pouvoir factoriser P par $X - 5$.

On a $P = (X - 5)(X^2 + 2X - 2)$. Les racines de P sont donc 5, $\sqrt{3} - 1$ et $-\sqrt{3} - 1$. Puisque $x_0 \in]0, 5[$ on en déduit que $x_0 = \sqrt{3} - 1$.

Finalement l'équation $\varphi(x) = \frac{\pi}{4}$ a pour unique solution $\sqrt{3} - 1$.